Ceros de funciones holomorfas

z_0 es un cero de $f(z)$ si $f(z_0)=0$.

Consideremos $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, f holomorfa en el abierto conexo D.

Si $z_0\in D$, f es analítica allí:

$$f(z)= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \qquad |z-z_0|<r$$

- Si $f(z_0)=0$ (z_0 es un cero de f) $\Rightarrow a_0=0$

$$f(z)= a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3+\dots$$
$$= (z-z_0)\left[a_1 + a_2(z-z_0)^1 + a_3(z-z_0)^2 + \dots\right]$$
$$= (z-z_0)\cdot\varphi_1(z) \qquad \text{con } \varphi_1 \text{ holomorfa en } |z-z_0|<r$$
$$\varphi_1(z_0)=a_1$$

- Si $f'(z_0)=0 \Rightarrow a_1=0$

$$f(z)=(z-z_0)^2\left[a_2 + a_3(z-z_0) + a_4(z-z_0)^2+\dots\right]$$
$$=(z-z_0)^2\,\varphi_2(z) \qquad \varphi_2 \text{ holomorfa en } |z-z_0|<r$$
$$\varphi_2(z_0)=a_2$$

- si $f''(z_0)=0 \Rightarrow a_2=0$

etc, etc.......

2 casos: o $f^{(n)}(z_0)=0 \quad n=0,1,2,\dots \Rightarrow f(z)=0$ en D.
(no es trivial, requiere demostración)

o $f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\dots=f^{(n-1)}(z_0)=0$ y $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ para algún $n\geq 1 \Rightarrow$

$$f(z)=(z-z_0)^n\,\varphi_n(z) \quad \text{con } \varphi_n(z) \text{ holomorfa}$$

en $|z-z_0|<r$ y

$$\varphi_n(z_0)=a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0$$

En este caso: "z_0 es cero de orden n de f"

z_0 es cero de orden n de f si $f(z_0)=f'(z_0)=\dots=f^{(n-1)}(z_0)=0$ y

$f^{(n)}\neq 0$ $(n\geq 1)$

$\Rightarrow f(z)=(z-z_0)^n\varphi_n(z)$ φ_n holomorfa en $|z-z_0|<r$, $r>0$ y $\varphi_n(z_0)\neq 0$.

Recíprocamente, si $f(z)=(z-z_0)^n\varphi_n(z)$ con φ_n holomorfa en un entorno de z_0 $\Rightarrow$ z_0 es cero de orden n de f.

Porqué? : $f(z_0)=(z_0-z_0)^n\varphi_n(z_0)=0$

$f'(z_0)=n(z_0-z_0)^{n-1}\varphi_n(z_0)+(z_0-z_0)^n\varphi_n'(z_0)=0$ si $n>1$

$\vdots$

$f^{(n}(z_0)=0$

$f^{(n)}(z_0)\neq 0$

Principio de los ceros aislados

Sea $f:D\to\mathbb{C}$ holomorfa en el abierto conexo D.

Si f no es idénticamente nula $\Rightarrow$ los ceros $\overset{\text{def}}{\text{son}}$ aislados

(es decir, si $z_0\in D$ y $f(z_0)=0$ $\Rightarrow$ $f(z)\neq 0$ para z en un entorno de z_0, $z\neq z_0$. O sea: $f(z)\neq 0$ en $\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|<r_1\}$

Dem:

Sea z_0 un cero de orden n.

$\Rightarrow f(z)=(z-z_0)^n\varphi_n(z)$ con φ_n holo en un entorno de z_0 y $\varphi_n(z_0)\neq 0$.

Como φ_n es continua, $\varphi_n(z)\neq 0$ en un entorno de z_0, digamos, para $|z-z_0|<r_1$ $\Rightarrow$ $f(z)\neq 0$ si $0<|z-z_0|<r_1$.

$\Rightarrow$ z_0 es cero aislado

Resumiendo: si $f(z_0)=0$ $\to$ $f\equiv 0$ en D

o

$\to$ z_0 es cero aislado

Corolario: sea $f:D\to\mathbb{C}$ holomorfa en abierto conexo D.

sea $Z_f=\{z\in D: f(z)=0\}$

Si existe $z_1\in D$, z_1 pto de acumulación de Z_f $\Rightarrow$

f es idénticamente nula en D.

Dem: si z_1 es pto acum de Z_f $\Rightarrow f(z_1)=0$ ($z_1\in D$, está def. f en z_1. Como f continua en z_1: $f(z_1)=0$)

$\Rightarrow$ z_1 es un cero no aislado

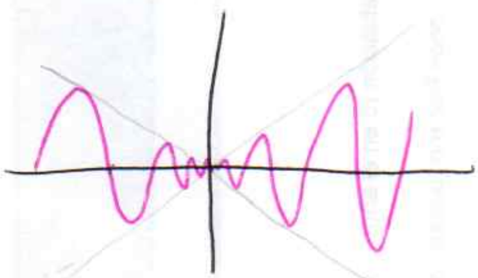
$\Rightarrow$ f es nula en D.

Esto no es así para funciones reales:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$Z_f=\{0\}\cup\{x=\frac{1}{k\pi},\ k\in\mathbb{Z}\}$ $k\neq 0$

0 es pto de acumulación de Z_f



f es derivable en $\mathbb{R}$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)-0}{x}=0$$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0\end{cases}$$

$Z_f=\{x: x\in\mathbb{R},\ x\leq 0\}$

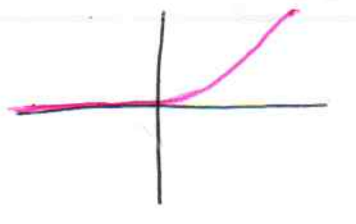
todos los ceros son no aislados (todos son ptos acum)

f es derivable en $\mathbb{R}$.

f no es idénticamente nula.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}-0}{x}=0$$

$f'(0^-)=0$



Es más:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f es C^∞ en $\mathbb{R}$.

$f^{(n)}(0) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Entonces... su serie de Taylor centrado en 0 es la serie idénticamente nula

$\Rightarrow$ no converge a f.

f no es analítica en 0

Ej: $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ $\quad Z_f = \{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \}$

Holomorfa en $\underbrace{\mathbb{C} - \{0\}}_{D}$ $\quad z_0 = 0$ es pto de acumulación de Z_f

Pero $z_0 \notin D$

Es más:

$$f(z) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/z) & z \neq 0 \\ c & z = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

no hay forma de elegir c para que sea holomorfa porque por continuidad: $c = 0$. Pero entonces $z_0 = 0$ sería un cero no aislado

---

Principio de identidad.

Sean $f : D \to \mathbb{C}$, $g : D \to \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas en un abierto conexo $D \subset \mathbb{C}$. Sea $Z_{fg} = \{ z \in D : f(z) = g(z) \}$.

Si Z_{fg} tiene un punto de acumulación z_1 en $D \Rightarrow$ $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D$.

Dem: Corolario anterior a la función $f - g$

(Problema 23)

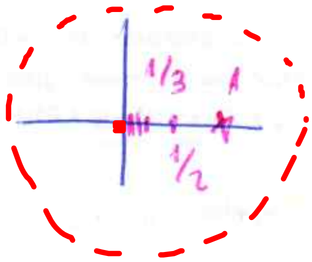
Ejemplo: Hallar todas las funciones holomorfas en $B(0,2)$ tales que $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$ $n\in\mathbb{N}$.

Como ~~debe ser~~ debe ser continua en 0, $f(0)=0$

Pero $z_1=0$ es cero no aislado

$\Rightarrow f\equiv 0$ en $B(0,2)$.

↳ abierto conexo



Ejemplo.

$$f(z)=\begin{cases} z^2\operatorname{sen}(1/z) & z\neq 0 \\ 0 & z=0. \end{cases}$$

Es holo en 0?

Claramente es holo en $\mathbb{C}-\{0\}$ los pts $z\neq 0$.

~~[illegible]~~

$f(z)=0$ si $z=\frac{1}{k\pi}$ y si $z=0$

$\Rightarrow$ 0 es cero no aislado. Como f no es idénticamente nulo

$\Rightarrow$ no puede ser holomorfa en 0.

Ejemplo

Sea $f(z)=\cos^2 z+\operatorname{sen}^2 z$

$g(z)=1$.

Probar que $f(z)=g(z)$. para todo $z\in\mathbb{C}$

Consideremos $h(z)=f(z)-g(z)=\cos^2 z+\operatorname{sen}^2 z-1$

Sabemos: $h(z)=0$ si $z=x\in\mathbb{R}$.

Como ~~los ceros~~ tiene ceros no aislados y h es holo en $\mathbb{C}$

$\Rightarrow h(z)=0$ para todo $z\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow \cos^2 z+\operatorname{sen}^2 z=1$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

Ejemplo (Integrador 13/12/18)

Sea $f(z)$ holomorfa en $\mathbb{C}$ tal que sobre el segmento del eje real $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $f(z) = f(x) = \operatorname{sen} x$.

Hallar $f(z)$.

Sea $g(z) = \operatorname{sen} z$, g es holomorfa en $\mathbb{C}$

$f(z) = g(z) \quad \forall z = x, \ 0 \leq x \leq 1.$

Entonces, coinciden en un conjunto que tiene pto de acumulación

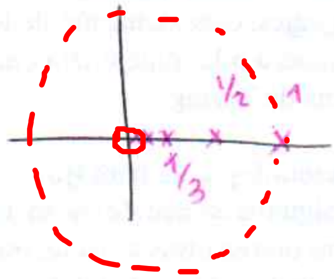
$\Rightarrow$ por principio de identidad, son iguales en $\mathbb{C}$

$\underline{f(z) = \operatorname{sen} z}$

Ejemplo (Integrador 18/7/19)

Hallar todas las funciones holomorfas en $B(0,1)$ tales que

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$



$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1 + 1/n}$

Sea $g(z) = \frac{1}{1+z}$ holo en $B(0,1)$

$f(z) = g(z)$ si $z = \frac{1}{n}$.

Cuánto es $f(0)$? Por ser continua, debe ser $f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$

entonces $f(0) = g(0)$.

$Z_{fg} = \{z \in B(0,1) : f(z) = g(z)\} = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$

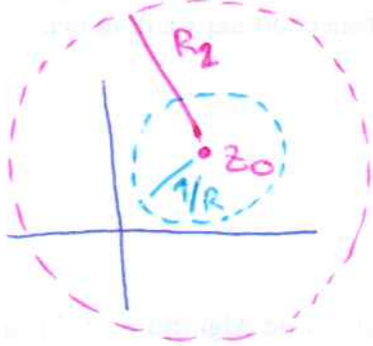
0 es pto de acumulación de Z_{fg}, $0 \in B(0,1) \Rightarrow f(z) = g(z) \ \forall z \in \cancel{\mathbb{C}}$ $B(0,1)$

$f(z) = \frac{1}{1+z}$ es la única función que cumple lo pedido

Series de Laurent

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{} \longrightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k}_{} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{(z-z_0)^k}}_{}$$

converge si $|z-z_0| < R_2$ — converge si $|w| < R$ — $w = \frac{1}{z-z_0}$ — converge si $|z-z_0| > \frac{1}{R}$



$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum^{\infty} b_k \frac{1}{(z-z_0)^k}}_{}$$

converge si $\frac{1}{R} < |z-z_0| < R_2$

$\left(\text{si } \frac{1}{R} < R_2\right)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{(z-z_0)^k} = \sum_{0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum_{1}^{\infty} b_k (z-z_0)^{-k}$$

$$\boxed{= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k}$$

$$c_k = \begin{cases} a_k & \text{si } k \geq 0 \\ b_{-k} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

$$\cdots + \underbrace{b_2}_{c_{-2}} (z-z_0)^{-2} + \underbrace{b_1}_{c_{-1}} (z-z_0)^{-1} + \underbrace{a_0}_{c_0} + \underbrace{a_1}_{c_1} (z-z_0) + \underbrace{a_2}_{c_2} (z-z_0)^2 + \cdots$$

Teorema de Laurent

Sea $A = \{ z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2 \}$ con $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$

Sea f holomorfo en A.

Entonces:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{(z-z_0)^k}$$

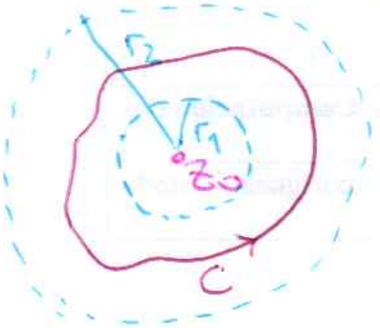
donde ambas series convergen absolutamente en A y uniformemente en conjuntos de la forma $A_1 = \{ z \in \mathbb{C} : \rho_1 \le |z-z_0| \le \rho_2 \}$ con $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$

Además:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) (z-z_0)^{k-1} \, dz \qquad k = 1, 2, \ldots$$

siendo C un contorno cerrado simple en A con $z_0 \in RI(C)$



Alternativamente:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Observaciones.

- El teo no dice que f no es holo en $|z-z_0| < r_1$.
  Si f es holo en $|z-z_0| \le r_1 \Rightarrow b_k = 0$ (por qué?)
  y $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ (FICG)

- r_1 puede ser 0 (f holo en $|z-z_0| < r_2$, excepto quizá en z_0)
  r_2 puede ser ∞ (f holo en $|z-z_0| > r_1$)

Ejemplos

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} \quad \text{en } A = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > 1 \} \quad (f \text{ es holo allí})$$

$$z_0 = 0$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z\left(\frac{1}{z}-1\right)} = \frac{-1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{-1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{k+2}}$$

$$\cancel{= -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 \dots}$$

$$-\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} \dots \qquad |z| > 1$$

$$a_k = 0 \qquad b_k = \begin{cases} -1 & \text{si } k \geq 2 \\ 0 & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Ejemplo

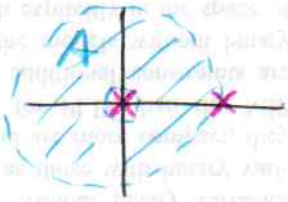
$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} \quad \text{en } A = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1 \}$$

$$z_0 = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots$$

$$0 < |z| < 1$$

$$a_k = 1 \qquad b_k = \begin{cases} 0 & k \geq 2 \\ 1 & k = 1 \end{cases}$$



Ejemplo $f(z) = e^{1/z}$, $z_0 = 0$

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \dots$$

$$A = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > 0 \}$$

Ejemplo $f(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{z^4}$ $\qquad z_0 = 0$

$$f(z) = \left[1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)\right]\frac{1}{z^4} =$$

$$= \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} - \frac{z^4}{8!} + \dots$$

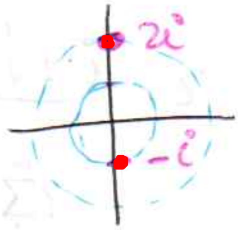
$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ \dfrac{(-1)^{j+1}}{(4+k)!} & \text{si } k \text{ es par, } k = 2j \geq -2 \\ 0 & \text{si } k \text{ par } k < -2 \end{cases}$$

Ejemplo $f(z) = \dfrac{3i}{z^2 - iz + 2}$ $\quad z_0 = 0$

¿Dónde no es holo?

$z^2 - iz + 2 = 0$

$z = 2i \quad z = -i$



Posibles regiones p/desarrollar:

a) $|z| < 1 \rightarrow$ Taylor

b) $1 < |z| < 2$

c) $|z| > 2$

a) $f(z) = \dfrac{1}{z - 2i} - \dfrac{1}{z + i} = \dfrac{1}{-2i} \dfrac{1}{\left(1 - \frac{z}{2i}\right)} - \dfrac{1}{i} \dfrac{1}{1 + \frac{z}{i}} =$ $\quad |z|<1$

$$= -\frac{1}{2i} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2i}\right)^k}_{|z|<2} - \underbrace{\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{i}\left(-\frac{z}{i}\right)^k}_{|z|<1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2i}\frac{1}{(2i)^k} - \frac{(-1)^k}{i \cdot i^k}\right) z^k$$

b) $f(z) = \dfrac{1}{z - 2i} - \dfrac{1}{z + i} = \underbrace{\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{-1}{2i}\left(\frac{z}{2i}\right)^k}_{|z|<2} - \dfrac{1}{z} \dfrac{1}{1 + \frac{i}{z}} =$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{-1}{(2i)^{k+1}} z^k - \frac{1}{z} \underbrace{\sum_{0}^{\infty} \left(-\frac{i}{z}\right)^k}_{\left|\frac{i}{z}\right|<1 \iff |z|>1} = \underbrace{\sum_{0}^{\infty} \frac{-1}{(2i)^{k+1}} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{z^{k+1}}}_{1<|z|<2}$$

c) $f(z) = \dfrac{1}{z} \dfrac{1}{1 - \left(\frac{2i}{z}\right)} - \dfrac{1}{z} \dfrac{1}{1 + \frac{i}{z}} = \dfrac{1}{z} \underbrace{\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \left(\frac{2i}{z}\right)^k}_{\left|\frac{2i}{z}\right|<1} - \dfrac{1}{z} \underbrace{\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \left(\frac{-i}{z}\right)^k}_{\left|\frac{i}{z}\right|<1}$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{(2i)^k}{z^{k+1}} - \sum_{0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{z^{k+1}} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(2^k - (-1)^k) \cdot i^k}{z^{k+1}} \qquad |z|>2$$

$$= \cancel{\frac{(4-i)\,i}{z^2} + \frac{(4-i)\,i^2}{z^3} + \frac{(8-i)\,i^3}{z^4} + \frac{(16-i)\,i^4}{z^5} + \dots}$$